ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Session 1987

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES ELEVES PILOTES DE LIGNE

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Coef. : 7

IMPORTANT : Le candidat doit choisir de traiter deux problèmes et deux seulement parmi les trois qui sont proposés et indiquer clairement son choix au début de sa copie : le correcteur ne corrigera que la rédaction correspondant à cette indication.

Premier Problème

ALGEBRE

On se donne dans un plan euclidien un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox, Oy. On représente tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec x et y réels) par le point M de coordonnées x et y, qu'on appelle son image. Dans tout le problème n désigne un entier strictement positif.

I.1. - Comment sont placées les images des nombres complexes solutions de l'équation $z^n = 1$?
Même question pour l'équation $(z + 1)^n = 1$.

I.2. - On considère le polynôme $P_n(z) = (z + 1)^{n+1} - z^{n+1} - 1$.

a) On suppose que $P_n(z)$ admet au moins un zéro multiple, soit z_o un tel zéro. Quelles sont les valeurs possibles de z_o ?

b) Déterminer l'ensemble E des valeurs de n pour lesquelles $P_n(z)$ admet au moins un zéro multiple.

c) Déterminer, selon les valeurs de n, le P.G.C.D. (plus grand commun diviseur) du polynôme $P_n(z)$ et de son polynôme dérivé $P'_n(z)$.

I.3. - Soit $q = \inf(E)$ le plus petit élément de E.

a) Montrer que le polynôme P_q divise le polynôme P_n quelque soit n dans E.

b) Déterminer plus généralement le P.G.C.D. de P_q et de P_n quand n est un entier quelconque.

c) Déterminer le P.G.C.D. des polynômes dérivés P'_n et P'_p lorsque n et p sont deux entiers quelconques ayant un entier r positif pour P.G.C.D.

d) Déterminer le P.G.C.D. de P'_q et de P_p lorsque p est un entier quelconque strictement positif.

I.4. - Donner les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle $\frac{1}{P_q(z)}$.

Deuxième Problème

ANALYSE

On cherche à déterminer une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une dérivée strictement positive au point 0, soit $f'(0) = a > 0$, et telle que, quels que soient x et y réels, avec $xy \neq -1$, on ait :

$f(x) \cdot f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right)$. On suppose l'existence de f.

II.1. a) Calculer les valeurs de f aux points 0, +1 et -1.

b) Montrer que f ne peut s'annuler en aucun point x_o tel que $x_o \neq +1$ et $x_o \neq -1$.

c) Montrer que, quel que soit $t \in]-1, +1[$, f(t) est positif (on pourra poser x = y).

II.2. a) Montrer qu'il existe un voisinage à droite de 0 dans lequel $f(x) > 1$, et un voisinage à gauche de 0 dans lequel $f(x) < 1$.

b) On considère la suite réelle définie par la relation de récurrence :

$u_n = \frac{2u_{n-1}}{1+u^2_{n-1}}$ et $u_o \neq 0$.

Montrer que cette suite converge, et trouver sa limite selon le signe de u_o .

Tournez la page S. V. P.

c) En déduire que f ne peut être continue au point +1.

d) On suppose f continue au point -1. Montrer que $f(x) < 1$ pour tout $x \in]-1, 0[$; que dire de f(x) pour $x < -1$?

II.3. a) Soit x_1 un réel tel que $x_1 \neq 0$ et $|x_1| \neq 1$. Déterminer $M(x_1)$ tel que, si $|h| < M(x_1)$, alors on peut trouver un réel y tel que :

$$\frac{x_1 + y}{1 + x_1 y} = x_1 + h \quad .$$

b) En déduire que f est dérivable en x_1.

c) Déduire du calcul de f'(x) l'expression de f(x) pour $x \in]-1, +1[$.

II.4. a) Montrer que f(x) garde un signe constant, soit ε_1 , pour $x > +1$, et un signe constant, soit ε_2 , pour $x < -1$.

b) Montrer, en choisissant des valeurs convenables pour x et y, que ε_1 et ε_2 sont identiques.

c) On pose $z = \frac{x + y}{1 + xy}$, $q(x, y) = 1 - z$ et $h(x, y) = 1 + z$. Discuter, suivant les régions d'un plan décrites par le point M de coordonnées (x, y), les signes de q(x, y) et h(x, y), puis de f(x), f(y) et f(z). Représenter les résultats sur une figure claire dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox, Oy. ε_1 peut-il être arbitraire ?

II.5. Construire les diverses formes possibles du graphe de f(x) si on choisit $\varepsilon_1 > 0$

Troisième Problème

GEOMETRIE

Soit Γ l'hyperbole équilatère d'équation $y = \frac{1}{x}$ par rapport aux axes Ox, Oy, d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan affine euclidien. Soit A, B, C trois points distincts sur Γ , d'abscisses respectives a, b, c.

III.1. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC. Vérifier que H est sur Γ.

III.2. Soit Ω le cercle passant par les trois points A, B et C ; ce cercle coupe en général Γ en un quatrième point D.

a) On se donne a priori, l'équation du cercle Ω sous sa forme générale. Donner l'équation que doit satisfaire l'abscisse x d'un point M commun à Γ et à Ω .

b) En déduire les coordonnées de D en fonction de a, b et c. Préciser les positions respectives de D et de H.

c) En déduire également l'équation de Ω en fonction de a, b et c.

III.3. a) On suppose que H est en A. Montrer que BC est un diamètre de Ω , et comparer les directions de BC et de la tangente en A à Γ.

b) Deux droites perpendiculaires issues de A, soit Δ et Δ', coupent Γ en A et respectivement en M et M'. Montrer que si ces droites tournent autour de A, la droite MM' reste parallèle à la normale en A à Γ .

c) Montrer que A et D sont symétriques par rapport à O si et seulement si B et C sont diamétralement opposés sur Ω .

III.4. a) On suppose que D est en A. Comparer les directions de BC et de la tangente en A à Γ .

b) Un cercle variable, tangent en A à Γ , recoupe Γ en B' et C'. Montrer que la direction de la droite B' C' est invariable, et que l'orthocentre du triangle AB'C' (quand B' et C' sont distincts) est fixe.

III.5. a) Calculer les coordonnées du centre de courbure de Γ en A.

b) En déduire l'équation du cercle de courbure Ω_o de Γ en A.

c) Calculer les coordonnées du point I (autre que A) d'intersection de Ω_o et de Γ .
Comparer les directions de AI et de la tangente en A à Γ .
Pouvait-on considérer le cercle Ω_o comme un cas particulier du cercle Ω ?

ECOLE NATIONALE de l'AVIATION CIVILE:Pilotes